

Летний математический лагерь Futurum.
Личная командная олимпиада. Старшая лига.

1. Даны отрезки a, b, c ($c < 2b$). С помощью только циркуля построить отрезок x такой, чтобы $b : c = a : x$.

2. Из попарно различных цифр П, Е, Т, Р, О и В составлено шестизначное число ПЕТРОВ. Докажите, что произведение ПЕТРОВ·П·Е·Т·Р·О·В делится на 3.

3. В трапецию, большее основание которой равно 1 и острый угол равен 60 градусам, вписан круг, и около этой трапеции описан круг. Найти расстояние между центрами кругов.

4. Если площадь данного треугольника равна 1, то площадь треугольника, сторонами которого служат медианы данного, равна $3/4$.

5. Найдутся ли такие различные вещественные числа a, b, c , что прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ пересекаются в одной точке?

6. Дано число n . Оказалось, что существует ровно 37 различных пар натуральных чисел (x, y) , являющихся решениями уравнения

$$x^3 y^2 = n.$$

Докажите, что n не делится на сто миллионов (10^8).

7. Деревня рыцарей и лжецов на карте имеет вид клетчатого прямоугольника 2×10 , в каждой клетке живет один человек — рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Соседними считаются клетки, примыкающие друг к другу по стороне или углу. Каждый житель сказал: *Среди моих соседей нечетное число лжецов*. Четно или нечетно количество лжецов в деревне?

8. На стороне AC треугольника ABC нашлись точки K и L , такие что L — середина AK и BK — биссектриса угла $\angle LBC$. Оказалось, что $BC = 2BL$. Докажите, что $KC = AB$.

9. На кошачьем конкурсе красоты участниц оценивают по трем параметрам: усатости, хвостатости и кусатости. Из двух кошек более красивой считается та, которая превосходит другую по хотя бы двум из этих трех параметров (одинаковых значений не бывает). Было 25 участниц, и оказалось, что каждая из них красивее ровно 12 из оставшихся. Мурка была 8-й по усатости и 15-й по хвостатости. Которой она была по кусатости?

10. Вдоль дороги длиной 37 км стоит несколько пеньков (больше одного). Первый велосипедист едет по дороге со скоростью 15 км/ч. Возле каждого пенька он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Второй велосипедист едет со скоростью 20 км/ч и на каждом пеньке отдыхает в два раза дольше первого велосипедиста. Выехали и приехали они одновременно. Сколько пеньков на дороге?

11. В законодательном собрании 200 депутатов. Журналисты “Хреновой газеты” обнаружили, что для любых двух, еще не подравшихся между собой депутатов, каждый из остальных либо уже подрался с ними обоими, либо не дрался ни с одним из них. Докажите, что можно образовать комиссию либо из 15 депутатов еще не дравшихся между собой, либо из 15 депутатов, любые два из которых уже дрались между собой.